



TITLE:

# 可解リー群のユニタリ表現論 (等質空間における調和解析 II)

AUTHOR(S):

藤原, 英徳

---

CITATION:

藤原, 英徳. 可解リー群のユニタリ表現論 (等質空間における調和解析 II). 数理解析研究所講究録 1976, 262: 16-41

ISSUE DATE:

1976-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105816>

RIGHT:

# 可解リ一群のユニタリ表現論

東大 理 藤原英徳

§ 序. この総合報告は, Type I の単連結可解リ一群の dual を構成する Auslander-Kostant theory [1] の紹介である.

Notations.  $\mathbb{R}$  上有限次元リ環を  $\mathfrak{g}$  とし,  $\mathfrak{g}$  の dual vector space を  $\mathfrak{g}^*$  で表わす.  $f \in \mathfrak{g}^*$  に対し,  $\mathfrak{g}$  上の交代双一次形式  $B_f$  を, 任意の  $x, y \in \mathfrak{g}$  に対し,  $B_f(x, y) = f([x, y])$  で定義する.  $\mathfrak{g}$  の任意の vector subspace  $\mathfrak{a}$  に対し,

$$\mathfrak{a}_f = \{ x \in \mathfrak{g} ; B_f(x, y) = 0 \text{ for } \forall y \in \mathfrak{a} \}$$

とおき,  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_f$  なる時,  $\mathfrak{a}$  を  $f$  における isotropic subspace と呼ぶ. この時,  $\mathfrak{a}$  が  $f$  における maximal isotropic subspace (以下 m. i. s. と略記する).  $\Leftrightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_f \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_f$  かつ  $\dim \mathfrak{a} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}_f)$ .

§ Mackey's little group theorem. cf. [11], [12]

まず最初に, 後にしばしば用いられる一定理を準備する,

$G$  を局所 compact 群,  $H$  をその閉正規部分群,  $\hat{H}$  を  $H$  の dual (i.e. 既約ユニタリ表現の同値類の集合) とする。この時、  
 $V \in \hat{H}$ ,  $g \in G$  に対し、 $V^g(a) = V(g^{-1}ag)$  for  $\forall a \in H$  とおく  
 と  $V \mapsto V^g$  により  $G$  は  $\hat{H}$  に作用する。

定理.  $H$  を Type I とすると、 $G$  の  $V$  における stabilizer  $S$  は  
 $G$  の閉部分群であり、 $U$  を  $S$  の既約表現で  $U|_H$  が  $V$  の multiple  
 である様なものとする。又  $U'$  を  $U'|_H$  が  
 $V$  の multiple である様な他の  $S$  の既約表現とすると、

$$\text{ind}_{S \uparrow G} U \subseteq \text{ind}_{S \uparrow G} U' \iff U \subseteq U'.$$

§ Kirillov theory. cf. [9], [15]

定義.  $\mathfrak{g}$  の部分リー環  $\mathfrak{f}$  が  $f \in \mathfrak{g}^*$  における m.i.s. の時、 $\mathfrak{f}$   
 を  $f$  における real polarization と呼ぶ。 $\mathfrak{g}$  の部分リー環で、  
 $f \in \mathfrak{g}^*$  における isotropic subpace となつてゐる物の集合を、  
 $\mathcal{S}(f, \mathfrak{g})$  で、又  $f$  における real polarization の集合を  $\mathcal{M}(f, \mathfrak{g})$   
 で表わす。

注意.  $\mathfrak{g}$  が中零なら  $\mathcal{S}(f, \mathfrak{g})$  の中で最大次元を持つものの  
 集合が丁度  $\mathcal{M}(f, \mathfrak{g})$  であるが、一般にはそうはならない。  
 ( $\mathcal{M}(f, \mathfrak{g}) = \emptyset$  の場合もある。)

$G$  を単連結中零リー群、 $\mathfrak{g}$  を  $G$  のリー環、 $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\mathfrak{f} \in \mathcal{S}(f, \mathfrak{g})$   
 とする。この時  $\mathfrak{f}$  に対応する  $G$  の analytic subgroup を  $H$  とし、

$\chi_f(\exp x) = e^{if(x)} \quad (\forall x \in \mathfrak{g}), \quad \text{ind}_{\mathfrak{h}+\mathfrak{g}} \chi_f = \hat{\rho}(f, \mathfrak{f}, G)$  とおく.

定理. (1)  $M(f, \mathfrak{g}) \neq \emptyset$ .

(2)  $\mathfrak{f} \in M(f, \mathfrak{g}) \Leftrightarrow \hat{\rho}(f, \mathfrak{f}, G)$  は既約.

(3)  $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2 \in M(f, \mathfrak{g})$  ならば、 $\hat{\rho}(f, \mathfrak{f}_1, G) \simeq \hat{\rho}(f, \mathfrak{f}_2, G)$ .

又 Kirillov 及び Dixmier は次の定理を証明した.

定理. 単連結中零リ一群の任意の既約ユニタリ表現は monomial である (i.e. 適当な連結リ一部分群の 1 次元ユニタリ表現から induce される).

以上より  $\hat{G}$  を  $G$  の dual とすると、 $f \mapsto \hat{\rho}(f)$  なる  $\mathfrak{g}^*$  から  $\hat{G}$  の上への写像が定義される. 他方  $G$  は  $\mathfrak{g}^*$  に coadjoint 表現 (i.e. adjoint 表現の反傾表現) で作用する. その作用で  $f$  を通る orbit を  $O(f)$  で表わす.

定理.  $f_1, f_2 \in \mathfrak{g}^*$  とすると  $\hat{\rho}(f_1) \simeq \hat{\rho}(f_2) \Leftrightarrow O(f_1) = O(f_2)$ . この事実により、写像  $\mathfrak{g}^* \rightarrow \hat{G} \quad (f \mapsto \hat{\rho}(f))$  は全単射  $\alpha: \mathfrak{g}^*/G \rightarrow \hat{G}$  を誘導する.

注意.  $\mathfrak{g}^*/G$  及び  $\hat{G}$  は自然な topology を備え、 $G$  が単連結中零リ一群の場合、上の  $\alpha$  は位相同型写像となる. (cf. [5])

3次元 Heisenberg 群の既約ユニタリ表現. cf. [2], [16]

後に見るように、 $\mathfrak{g}$  が可解の場合には、 $M(f, \mathfrak{g}) = \emptyset$  なる事があり、 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  の適当な部分リ環を導入して、前節と異なる誘

導表現を構成する必要がある。この節では、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_3$  (3次元 Heisenberg リー環) に対して  $\mathfrak{g}^*$  の適当な部分リー環を用いて  $N_3 = \exp \mathfrak{n}_3$  の 1 次元以外のすべての既約ユニタリ表現を正則関数の空間上に構成し、Kirillov theory との関係を見る。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_3 = \{P, Q, E; [P, Q] = E\}$ ,  $G = N_3 =$  リー環  $\mathfrak{n}_3$  を持つ単連結中零リー群とする。

### ★ Kirillov method

$f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $f(E) = \lambda$  とする。

A)  $\lambda = 0$ ,  $O(f) = \{f\}$ : one point.

$$\mathfrak{g}_f = \mathfrak{g} = \mathfrak{n}_3.$$

B)  $\lambda \neq 0$ ,  $O(f) = \{\phi \in \mathfrak{g}^*; \phi(E) = \lambda\}$ : plane.

$$\mathfrak{g}_f = \{RE\}.$$

A) の場合、 $f$  が  $\mathfrak{n}_3$  の character を与え、 $N_3$  の 1 次元ユニタリ表現が得られる。

B) の場合を考える為、 $f = \lambda E^*$ ,  $f_0 = RQ \oplus RE \in \mathcal{H}(f, \mathfrak{g})$  とする。  $L^2(f, f_0)$  を  $N_3$  上の複素数値可測関数で殆ど到る所

$$\phi(gk) = \chi_f(k)^{-1} \phi(g), \quad g \in N_3, \quad k \in H_0 = \exp f_0$$

をみたし、 $N_3/H_0$  上の不変測度を  $d\mu$  とする時、

$$\|\phi\|^2 = \int_{N_3/H_0} |\phi|^2 d\mu < +\infty$$

なるもののなす Hilbert space とすれば、 $\hat{\rho}(f) = \hat{\rho}(f, f_0, N_3)$  は  $L^2(f, f_0)$  上に left translation で実現される。

さて任意の  $g \in N_3$  は、 $g = \exp x P \cdot \exp X$ ,  $X \in \mathfrak{f}_0$  と一意的に表わされ、故に  $N_3/H_0$  は  $\mathbb{R}$  と同一視され、 $du$  は  $\mathbb{R}$  上の Lebesgue 測度  $dx$  となる、今  $\phi \in L^2(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}_0)$  に対し、 $(I\phi)(x) = \tilde{\phi}(x)$   
 $= \phi(\exp x P)$  とおくと、 $I$  は  $L^2(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}_0)$  と  $L^2(\mathbb{R})$  の間のユニタリ同型を与え、 $\hat{\rho}(f)$  を  $I$  により  $L^2(\mathbb{R})$  上に移したものを  $\hat{\rho}^\lambda$  とすると、 $\tilde{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$  に対し、

$$\begin{aligned} (\hat{\rho}^\lambda(\exp x_0 P) \tilde{\phi})(x) &= \tilde{\phi}(x - x_0) \\ (\hat{\rho}^\lambda(\exp y_0 Q) \tilde{\phi})(x) &= e^{-i\lambda x y_0} \tilde{\phi}(x) \\ (\hat{\rho}^\lambda(\exp u_0 E) \tilde{\phi})(x) &= e^{i\lambda u_0} \tilde{\phi}(x) \end{aligned}$$

★ 正則関数の空間上における表現.

$f \in \mathfrak{g}^* = \mathfrak{n}_3^*$ ,  $f(E) = \lambda \neq 0$ ,  $P, Q$  を  $\ker f$  の base とし、  
 $[P, Q] = E$  なるものとし、 $f, B_f$  等は  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  まで線形に拡張して  
 考え、今  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  の部分リ-環  $\mathfrak{f} = \mathbb{C}(P + iQ) \oplus \mathbb{C}E$  を考えると、  
 これは  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  の  $B_f$  に関する m. i. s. でもある、次に  $N_3$  上の複素数値  
 $C^\infty$ -関数  $\phi$  と、 $X \in \mathfrak{n}_3$  に対し、

$$(\phi * X)(g) = \frac{d}{dt} \phi(g \exp t X) \Big|_{t=0}$$

又  $Y = X_1 + iX_2 \in \mathfrak{n}_3^{\mathbb{C}}$  に対し、 $\phi * Y = \phi * X_1 + i\phi * X_2$  とおき、  
 $N_3$  上の複素数値  $C^\infty$ -関数  $\phi$  で、任意の  $X \in \mathfrak{f}$  に対して、

$$\phi * X = -i \langle f, X \rangle \phi$$

なるものを考える。特に、 $\phi * E = -i \langle f, E \rangle \phi$  は、

$\phi(g \exp uE) = e^{-i\lambda u} \phi(g)$  を意味し、 $|\phi|^2$  は  $N_3$  の center  $Z$  上  
不変である。今  $\mathcal{H}(f, f)$  で  $N_3$  上の複素数値  $C^\infty$ -函数中で、

$$\phi * X = -i \langle f, X \rangle \phi \quad \text{for } \forall X \in \mathfrak{f} \quad \dots\dots \textcircled{*}$$

$$\|\phi\|^2 = \int_{N_3/Z} |\phi|^2 d\mu < +\infty$$

( $d\mu = N_3/Z$  上の左不変測度)

なるものの空間を表わす。後に見るように  $\mathcal{H}(f, f)$  はノルム

$$\|\phi\| = \left( \int_{N_3/Z} |\phi|^2 d\mu \right)^{1/2}$$

に関し完備で Hilbert space をなす。 $\mathcal{H}(f, f)$  への left trans-  
lation で得られる  $N_3$  のユニタリ表現を  $\pi_\lambda$  と書く。次に  $\mathcal{H}(f, f)$   
から正則函数から成るある空間への isometry を構成しよう。

補題. (1)  $N_3$  上の函数  $\phi_0$ ,

$$\phi_0(\exp(xP+yQ)\exp(uE)) = e^{-i\lambda u} e^{-\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)},$$

は  $\textcircled{*}$  をみたす。

(2)  $\textcircled{*}$  をみたす  $N_3$  上の  $C^\infty$ -函数中は、 $\phi = \phi_0 \cdot \alpha$  ;

$$\alpha(\exp(xP+yQ)\exp(uE)) = F(x+iy)$$

$F$  は  $z = x+iy$  の正則函数,

の形である。

さて  $N_3$  の任意の元は  $\exp(xP+yQ)\exp(uE)$  の形に一意的に表  
わされるから、 $N_3/Z$  は複素平面  $\{z = x+iy\}$  と同一視され、測  
度  $d\mu$  は  $dx \cdot dy$  となる。この時、上の補題より、空間  $\mathcal{H}(f, f)$   
は、正則函数  $F(z)$  で

$$\|F\|^2 = \int e^{-\frac{\lambda}{2}|z|^2} |F(z)|^2 dx dy < +\infty$$

なるものの空間  $\mathcal{H}(\lambda)$  と isometric  $\tau$ , isometry  $J: \mathcal{H}(f, f) \rightarrow \mathcal{H}(\lambda)$  は、 $\phi \in \mathcal{H}(f, f)$  に対し、 $(J\phi)(x+iy) = e^{\frac{\lambda}{4}(x^2+y^2)} \times \phi(\exp(xP+yQ))$  で与えられる。  $\pi^\lambda$  を  $J$  で  $\mathcal{H}(\lambda)$  上に移したものを  $\Upsilon^\lambda$  とすると、

命題.  $(\Upsilon^\lambda(\exp(x_0P+y_0Q))F)(z) = e^{-\frac{\lambda}{4}|z_0|^2} e^{\frac{\lambda}{2}z\bar{z}_0} F(z-z_0)$

ただし  $z_0 = x_0 + iy_0$ .

$$(\Upsilon^\lambda(\exp u_0E)F)(z) = e^{i\lambda u_0} F(z).$$

次に  $\mathcal{H}(\lambda) \neq \{0\}$  かどうかを考える。今  $P$  を多項式、 $\alpha$  を複素数として  $e^{\alpha z} P(z)$  の形の正則関数の有限一次結合のなす空間を  $\mathcal{E}$  とすると、 $\lambda > 0$  なら  $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}(\lambda)$  となり、更に  $\mathcal{E}$  は  $\Upsilon^\lambda$  で不変である。

命題. (1)  $\mathcal{H}(\lambda) \neq \{0\} \iff \lambda > 0$ .

(2) もし  $\lambda > 0$  ならば、 $\mathcal{H}(\lambda)$  はノルム

$$\|F\| = \left( \int e^{-\frac{\lambda}{2}|z|^2} |F(z)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

に関して完備であり、 $\mathcal{E}$  は  $\mathcal{H}(\lambda)$  の dense な部分空間をなす。

★  $\hat{\rho}^\lambda$  と  $\Upsilon^\lambda$  のユニタリ同値

次に表現  $\Upsilon^\lambda$  と  $\hat{\rho}^\lambda$  がユニタリ同値であることを示す為、

$\mathcal{f}_0 = \mathbb{R}Q \oplus \mathbb{R}E$  として、 $\phi \in \mathcal{H}(f, f)$  に対し  $U\phi \in L^2(f, \mathcal{f}_0)$  を構成しよう。この時  $U\phi$  は、



$$(U\phi)(g \exp u_0 E) = e^{-iu_0} \phi(g)$$

$$(U\phi)(g \exp y Q) = (U\phi)(g)$$

をみたさねばならず、特に  $U\phi$  は  $\exp y Q$  により不変である。

そこで形式的に

$$(U\phi)(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(g \exp y Q) dy$$

とおき、この  $U$  を同型  $I$  と  $J$  で移した  $\tilde{U}$  を考える。

$$\mathcal{H}(f, f) \xrightarrow{J} \mathcal{H}(\lambda)$$

$$U \downarrow \qquad \qquad \downarrow \tilde{U}$$

$$L^2(f, f_0) \xrightarrow{I} L^2(\mathbb{R})$$

定理. (1)  $\tilde{U}$  は (定数倍を除いて)  $\mathcal{H}(\lambda)$  と  $L^2(\mathbb{R})$  の間のユニタリ同型を与える。

(2)  $\tilde{U}^{-1}$  は、 $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  に対し

$$(\tilde{U}^{-1}\phi)(z) = \frac{\lambda}{2\pi} e^{-\frac{\lambda}{4} z^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda \zeta z} e^{-\frac{\lambda \zeta^2}{2}} \phi(\zeta) d\zeta$$

で与えられる。

(3)  $\tilde{U}$  は  $\mathbb{P}^\lambda$  と  $\hat{\phi}^\lambda$  の間の intertwining operator である。

§ 中零り-群から exponential group へ. cf. [3], [4], [16]

Kirillov theory を単連結な可解り-群まで拡張しようとするとき、いくつかの障害が生じる。まず exponential group の場合を考察する。

$\mathfrak{g}$  を  $\mathbb{R}$  上の  $n$  次元可解り-環、 $\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}^c$ 、

$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_i = i$  を  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  のイデアルの flag とする. この時  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  の各 quotient  $\mathfrak{g}_{i+1}/\mathfrak{g}_i$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ) 上への adjoint action に応じて  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  上の linear form  $\lambda_i$  が生じる.

定義.  $\lambda_i$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ) を  $\mathfrak{g}$  に制限したものを  $\mathfrak{g}$  の roots という.

定義.  $G$  を単連結可解リー群,  $\mathfrak{g}$  をそのリー環とする.

$\exp: \mathfrak{g} \rightarrow G$  が全射である時,  $G$  を exponential group と呼ぶ.

命題.  $G$  を単連結可解リー群,  $\mathfrak{g}$  をそのリー環とする時,

次の (1) ~ (6) は同値である. (cf. [6], [18])

- (1)  $G$  は exponential group
- (2)  $\exp$  が単射である.
- (3)  $\exp$  が微分同型写像である.
- (4)  $\mathfrak{g}$  の roots は  $\lambda$  を  $\mathfrak{g}$  上の real linear form として  $x \mapsto \lambda(x)(1+i\alpha)$  の形である.
- (5)  $\mathfrak{g}$  は  $\mathfrak{g}_4$  (diamond algebra; 定義は後程) 及び  $\mathfrak{g}_3$  (平面の運動群の universal covering group のリー環) に同型な部分リー環を含まない.
- (6)  $\mathfrak{g}$  は 0 でない純虚数値をとる root を持たない.

定義. 可解リー環  $\mathfrak{g}$  が exponential リー環であるとは, その roots が上記命題の (4) をみたす事を言う.

★  $ax+b$  group

$\mathfrak{g}_2 = \{e_1, e_2; [e_2, e_1] = e_1\}$  とし、 $G_2$  を リー環  $\mathfrak{g}_2$  をもつ単連結リー群とする。 $G_2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ;  $(x, y) \cdot (x', y') = (x + e^y x', y + y')$  である。 $G_2$  を  $ax+b$  group と呼ぶ。今  $f \in \mathfrak{g}_2^*$ ,  $f(e_1) = \lambda$  すると、coadjoint 表現の orbits は

1)  $\lambda = 0$  の場合

$$O(f) = \{f\}$$

2) その他 2 つの orbits

$$O_+ = \{f; f(e_1) > 0\}$$

(半平面)

$$O_- = \{f; f(e_1) < 0\}$$

となる。今  $f = e_1^*$ ,  $f = \mathbb{R}e_2$  とすると  $f \in M(f, \mathfrak{g}_2)$ 。次の命題は Kirillov theory がそのままでは完全可解リー群まで拡張できない事を示している。

命題.  $\hat{\rho}(f, f, G_2)$  は可約である。

証明. 同型  $R: \mathcal{H}(f, f, G_2) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  を  $(R\phi)(x) = \phi(\exp x e_1) = \hat{\phi}(x)$  で定義し、 $R$  と Fourier 変換  $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  を合成したもので  $\hat{\rho}$  を移した表現を  $\hat{\rho}_R$  とすると、 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  に対し、

$$(\hat{\rho}_R(\exp x_0 e_1)\psi)(x) = e^{-ixx_0} \psi(x)$$

$$(\hat{\rho}_R(\exp y_0 e_2)\psi)(x) = e^{\frac{y_0}{2}} \psi(e^{y_0} x)$$

従って  $x > 0$  又は  $x < 0$  で殆ど到る所 = 0 なるものから成る  $L^2(\mathbb{R})$  の部分空間は共に  $\hat{\rho}_R$  で不変である。 g.e.d.

従って Kirillov theory を exponential group まで拡張する為には次の概念が必要である。(cf. [14])

命題.  $G$  を exponential group,  $\mathfrak{g}$  を  $\mathbb{F}$  の リー環,  $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $f \in S(f, \mathfrak{g})$ ,  $H = \exp f$  とする. この時次の 1) ~ 3) は同値である. 1)  $H.f = f + f^\perp$ .

2)  $f + f^\perp \subset O(f)$  かつ  $f \in M(f, \mathfrak{g})$ .

3) 任意の  $\varphi \in f^\perp$  に対し,  $f \in M(f + \varphi, \mathfrak{g})$ .

但し,  $f^\perp = \{\varphi \in \mathfrak{g}^*; \varphi(f) = 0\}$  とする.

定義.  $f \in S(f, \mathfrak{g})$  が上記命題の 1) をみたす時, Pukanszky condition をみたすと言う.

Pukanszky condition をみたす  $f \in S(f, \mathfrak{g})$  の全体を  $I(f, \mathfrak{g})$  で表わす.

定理.  $G$  を exponential group,  $\mathfrak{g}$  を  $\mathbb{F}$  の リー環,  $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $f \in S(f, \mathfrak{g})$  とする.

1)  $I(f, \mathfrak{g}) \neq \emptyset$ .

2)  $\hat{\rho}(f, f, G)$  が既約  $\iff f \in I(f, \mathfrak{g})$ .

3)  $f_1, f_2 \in I(f, \mathfrak{g}) \implies \hat{\rho}(f, f_1, G) \simeq \hat{\rho}(f, f_2, G)$ .

故に  $\hat{\rho}: \mathfrak{g}^* \rightarrow \hat{G}$  が定義され,

4)  $\hat{\rho}$  は全射である. (cf. [20])

5)  $f_1, f_2 \in \mathfrak{g}^*$  に対し,  $\hat{\rho}(f_1) = \hat{\rho}(f_2) \iff O(f_1) = O(f_2)$ .

従って  $\mathbb{F}$  の零リー群の場合と同様に, 全単射  $\alpha: \mathfrak{g}^*/G \rightarrow \hat{G}$  が得られる.

又  $G$  が exponential group の場合,  $f \in M(f, \mathfrak{g})$  から構成した

$\hat{\rho}(f, f, G)$  の既約成分への分解に関しては、Vergne [21] に  
より次の事実が知られている。  $\mathfrak{g}$  の任意の部分空間  $\mathcal{O}$  に対し、  
 $\mathcal{O}^\perp = \{ \lambda \in \mathfrak{g}^*; \lambda(\mathcal{O}) = 0 \}$  とし、  $U(f, \mathcal{O})$  で  $f + \mathcal{O}^\perp$  と  $f + \mathcal{O}^\perp$   
の空でない開集合で交わる orbits の集合を表わし、  $w$  をある  
orbit とする時、  $c(w; f; \mathcal{O})$  で  $w \cap (f + \mathcal{O}^\perp)$  の連結成分の数  
を表わす事にする。

定理.  $G$  を exponential group,  $\mathfrak{g}$  を  $\mathbb{R}$  のリー環、  $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  
 $f \in M(f, \mathfrak{g})$  とする。

- 1)  $U(f, f)$  は有限集合である。
- 2)  $w \in U(f, f)$  ならば  $c(w; f; f) < +\infty$
- 3)  $\hat{\rho}(f, f, G) = \sum_{w \in U(f, f)} c(w; f; f) \wedge(w)$

§ 可解群へ. cf. [4], [16], [19]

まず  $\mathfrak{g}_4$  と  $\mathfrak{g}_3$  を例にとり、exponential group から可解群への  
の拡張に際し、更にいかなる障害が生じるかを見よう。

\* The oscillator group.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_4 = (\mathcal{H}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{E}) ; [\mathcal{H}, \mathcal{P}] = -\mathcal{Q}, [\mathcal{H}, \mathcal{Q}] = \mathcal{P},$$

$[\mathcal{P}, \mathcal{Q}] = \mathcal{E}$ .  $\mathfrak{g}_4$  は diamond algebra と呼ばれる non-exponential  
なリー環であり、この  $\mathfrak{g}_4$  をリー環に持つ単連結リー群は  
oscillator group  $G = N_3 \times_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$  である、ここに  $N_3$  は 3次元  
Heisenberg 群であり、 $\mathbb{R} = \exp t\mathcal{H}$ .

Orbits:  $f_0 = \alpha_0 H^* + \beta_0 P^* + \gamma_0 Q^* + \delta_0 E^*$

A)  $\delta_0 = 0$ . i)  $\beta_0^2 + \gamma_0^2 \neq 0 \Rightarrow$  円柱.

ii)  $\beta_0^2 + \gamma_0^2 = 0 \Rightarrow$  1点.

B)  $\delta_0 \neq 0$ .  $\alpha - \frac{\beta^2 + \gamma^2}{2\delta_0} = \alpha_0 - \frac{\beta_0^2 + \gamma_0^2}{2\delta_0} = \text{const.}$

回転放物面.

今  $f_0 = \alpha_0 H^* + \delta_0 E^*$ ,  $\delta_0 \neq 0$  とすると,  $\mathcal{G}_{f_0} = \mathbb{R}H \oplus \mathbb{R}E$ . 故に  $M(f_0, \mathcal{G})$  の元は  $\mathcal{G}_{f_0}$  を含む 3次元の部分リ-環であるが、明らかに  $\tau$  は存在しない. この場合ある  $f \in \mathcal{S}(f_0, \mathcal{G})$  から  $\hat{\rho}(f_0, f, G)$  を作る事によつて  $G$  のいかなる既約表現も得られない (cf. [19]). (しかし  $\mathcal{G}^c$  の部分リ-環  $\tau^{-1}B_{f_0}$  に関して m.i.s. になつてゐる  $f_1 = \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}(P+iQ) \oplus \mathbb{C}H$ ,  $f_2 = \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}(P-iQ) \oplus \mathbb{C}H$  を考えると,  $\delta_0 > 0$  (resp.  $\delta_0 < 0$ ) の時,  $f_1$  (resp.  $f_2$ ) から holomorphically induced representation  $\rho(f_0, f_1, G)$  (resp.  $\rho(f_0, f_2, G)$ ) を構成する事により  $G$  の既約表現が得られる.

\*  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_3 = (H, P, Q)$ ;  $[H, P] = -Q$ ,  $[H, Q] = P$ .

Orbits:  $f_0 = \alpha_0 H^* + \beta_0 P^* + \gamma_0 Q^*$

A)  $\beta_0^2 + \gamma_0^2 \neq 0 \Rightarrow \beta^2 + \gamma^2 = \beta_0^2 + \gamma_0^2$  円柱

B)  $\beta_0^2 + \gamma_0^2 = 0 \Rightarrow O(f_0) = \{f_0\}$  1点

今  $f = \beta P^*$ ,  $\beta \neq 0$  とすると,  $G$  の  $f$  における固定群  $G_f$  は,

$$G_f = \exp(2\pi\mathbb{Z}H) \times \exp \mathbb{R}P \quad (\mathbb{Z} = \text{integers})$$

であり、 $\mathfrak{f}$  のリー環は  $\mathfrak{g}_{\mathfrak{f}} = \mathbb{R}P$  である。  $\mathfrak{f}_0 = \mathbb{R}P \oplus \mathbb{R}Q$  として、  $M(\mathfrak{f}, \mathfrak{g}) = \{\mathfrak{f}_0\}$  であり、又  $\mathfrak{f}_0$  は Pukanszky condition をみたす。にもかかわらず  $\hat{\mathfrak{f}}(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}_0, G)$  は既約表現  $U^{\beta, \lambda}(\lambda \in \mathbb{P})$  の直積分となる。ここに  $U^{\beta, \lambda}$  はいかにして得られるかというところ、  $\mathfrak{f}_0$  の任意の元  $h$  に対し、  $\pi_{\mathfrak{f}}(\exp h) = e^{i\mathfrak{f}(h)}$  において  $\mathfrak{f}_0$  に対応する  $G$  の連結リー部分群  $D^0$  (可換正規部分群) の character を得る。  $G$  の  $\hat{D}^0$  の作用に関して  $\pi_{\mathfrak{f}}$  における固定群  $D$  は、  $D = \exp(2\pi\mathbb{Z}H) \times D^0$ 。今  $J_{\mathfrak{f}}$  を、  $J_{\mathfrak{f}}|_{D^0}$  が  $\pi_{\mathfrak{f}}$  の multiple となるような  $D$  の既約表現とすれば、 Mackey's little group theorem により  $\text{ind}_{D \uparrow G} J_{\mathfrak{f}}$  は既約となる。明らかにこのような  $J_{\mathfrak{f}}$  は、  $\lambda \in \mathbb{P}$  として

$$J_{\mathfrak{f}}^{\lambda}(2\pi n, \exp h) = e^{2\pi i \lambda n} e^{i\mathfrak{f}(h)} \quad \text{for } \forall n \in \mathbb{Z}, \forall h \in \mathfrak{f}_0$$

の形である。この時、  $U^{\beta, \lambda} = \text{ind}_{D \uparrow G} J_{\mathfrak{f}}^{\lambda}$ 。

§ Auslander - Kostant theory. cf. [1], [4], [13], [16]

1) polarizations.

前節の考察からわかる通り、一般の可解群の場合には、まず  $M(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})$  の概念を  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  まで拡張する必要がある。

定義.  $G$  をリー群、  $\mathfrak{g}$  をそのリー環、  $\mathfrak{f} \in \mathfrak{g}^*$  とする。  $\mathfrak{f}$  における  $G$  の polarization とは、  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  の複素部分リー環  $\mathfrak{f}$  であって次の条件 1) ~ 3) をみたすものをいう。

1)  $\mathfrak{f}$  は  $B_{\mathfrak{f}}$  に関して m.i.s. である。

2)  $\mathfrak{f} + \bar{\mathfrak{f}}$  は  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  の部分リ-環である.

3)  $\mathfrak{f}$  は  $\text{Ad}_G G_{\mathfrak{f}}$  で不変である, ここに  $G_{\mathfrak{f}}$  は  $G$  の coadjoint 表現に関する  $\mathfrak{f}$  における固定群を表わす.

以下しばらく,  $G$  をリ-群,  $\mathfrak{g}$  をそのリ-環,  $\mathfrak{f} \in \mathfrak{g}^*$  とし,  $\mathfrak{f}$  における  $G$  の polarization の集合を  $P(\mathfrak{f}, G)$  で表わす.

定義,  $\mathfrak{f} \in P(\mathfrak{f}, G)$  に関連して  $\mathfrak{g}$  及び  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  の部分リ-環を定義する, 即ち,  $\mathfrak{v} = \mathfrak{f} \cap \mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{v}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{v} + i\mathfrak{v}$

$$\mathfrak{e} = (\mathfrak{f} + \bar{\mathfrak{f}}) \cap \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{e}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{e} + i\mathfrak{e}$$

とおく.

$\mathfrak{v}$  は  $B_{\mathfrak{f}}$  に関する  $\mathfrak{e}$  の直交補空間であり,  $B_{\mathfrak{f}}$  は  $\mathfrak{e}/\mathfrak{v}$  上に正則な交代双一次形式  $\hat{B}_{\mathfrak{f}}$  を誘導する. 又  $(\mathfrak{e}/\mathfrak{v})^{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{f}/\mathfrak{v}^{\mathbb{C}} \oplus \bar{\mathfrak{f}}/\mathfrak{v}^{\mathbb{C}}$  である.

定義,  $J \in \text{End}(\mathfrak{e}/\mathfrak{v})^{\mathbb{C}}$  を次の様に定義する.

$$J(x) = \begin{cases} -ix & \text{if } x \in \mathfrak{f}/\mathfrak{v}^{\mathbb{C}} \\ ix & \text{if } x \in \bar{\mathfrak{f}}/\mathfrak{v}^{\mathbb{C}} \end{cases}.$$

この時  $J$  は  $\mathfrak{e}/\mathfrak{v}$  を不変に保ち,  $\mathfrak{e}/\mathfrak{v}$  上で  $J^2 = -1$  となる. 今  $u, v \in \mathfrak{e}/\mathfrak{v}$  に対し,  $S_{\mathfrak{f}}(u, v) = \hat{B}_{\mathfrak{f}}(u, Jv)$  とおくと,  $S_{\mathfrak{f}}$  は  $\mathfrak{e}/\mathfrak{v}$  上の正則な対称双一次形式である.

定義,  $S_{\mathfrak{f}}$  が正定値であるか, 又は  $\mathfrak{e}/\mathfrak{v} = \{0\}$  即ち  $\mathfrak{f} = \bar{\mathfrak{f}}$  の時,  $\mathfrak{f} \in P(\mathfrak{f}, G)$  は positive であるという.

注意, 上記定義は任意の  $x \in \mathfrak{f}$  に対し,  $\text{if}([x, \bar{x}]) \geq 0$  な



る事と同値。

$f \in \mathfrak{g}^*$  における  $G$  の positive polarization の全体を  $P^+(f, G)$  で表わす。

さて  $f \in P(f, G)$  とし、 $\mathcal{D}, \mathcal{E}$  に対応する  $G$  の連結リー部分群をそれぞれ  $D^0, E^0$  とし、 $D = G_f \cdot D^0$ ,  $E = G_f \cdot E^0$  とおくと、 $f$  は  $\text{Ad}_G G_f$  で不変だから  $D, E$  は  $G$  の部分群である。

定義.  $D, f$  が  $\mathfrak{g}^*$  の閉集合である時 (これは  $D, f = f + \mathcal{E}^+$  と同値)、 $f$  は weak Pukanszky condition をみたすといふ、 $E, f$  が  $\mathfrak{g}^*$  の閉集合の時、 $f$  は strong Pukanszky condition をみたすといふ。

注意. ①  $f \in \mathcal{M}(f, \mathfrak{g})$  が前に述べた Pukanszky condition をみたす  $\Leftrightarrow f^c \in P^+(f, G)$  が weak Pukanszky condition をみたす。  
 $\Leftrightarrow f^c \in P^+(f, G)$  が strong Pukanszky condition をみたす。

② strong Pukanszky condition は weak Pukanszky condition よりも実際強い条件で、少くとも  $G$  が exponential group の場合、後に述べる holomorphically induced representation  $\rho(f, f, G)$  が既約になる為の条件は  $f \in P^+(f, G)$  が weak Pukanszky condition をみたす事の様に思われる?

2) holomorphically induced representation.

次に strong Pukanszky condition をみたす  $f \in P(f, G)$  に関連

(7)  $G$  の表現を構成する事を考えよう (weak Pukanszky condition の下に同様の構成が出来るわけであるが、簡単の為 strong の仮定を置く)。

定義.  $f \in \mathfrak{g}^*$  が integral とは、 $\tau$  の differential が付いた character  $\eta_f: G_f \rightarrow \mathbb{T}$  が存在する事をいう。

注意.  $G$  が連結の時、 $\eta_f$  の存在は orbit  $G \cdot f$  上の canonical symplectic 2-form が integral である事と同値である (cf. [10]).

以下常に  $f$  は integral と仮定し、対応する  $G_f$  の character を  $\eta_f$  で表わす。

命題.  $f \in P(f, G)$  が strong Pukanszky condition をみたす時、 $\eta_f$  は  $\tau$  の differential が  $if|_{\mathcal{D}}$  なる  $D$  の character  $\chi_f: D \rightarrow \mathbb{T}$  に一意的に拡張される。

さて  $X = E/D$  とおくと、 $X$  は連結であり、 $\mathcal{D}/\mathcal{D}$  上の正則な  $D$ -不変交代双一次形式  $\hat{B}_f$  は  $X$  上に  $E$ -不変測度  $\mu_X$  を誘導する。 $E$  上の複素数値可測函数  $\varphi$  で

$$\varphi(ab) = \chi_f(b)^{-1} \varphi(a) \quad a \in E, b \in D$$

なるものの空間を  $M(E, \chi_f)$  とおき、

$$\int_X |\varphi|^2 d\mu_X < +\infty$$

となる  $\varphi \in M(E, \chi_f)$  の同値類のなす Hilbert space を  $\mathcal{H}(E, \chi_f)$  とする。 $\mathcal{H}(E, \chi_f)$  は  $\varinjlim_{D \vdash E} \chi_f$  の表現空間である。次に  $C^\infty(E)$  を  $E$  上の複素数値  $C^\infty$ -函数の空間とし、 $X, Y \in \mathcal{L}$ ,  $Z = X + iY \in \mathcal{L}^\mathbb{C}$ ,

$\varphi \in C^\infty(E)$  の時,  $\varphi * Z = \varphi * X + i\varphi * Y$

$$(\varphi * X)(a) = \frac{d}{dt} \varphi(a \exp tX) \Big|_{t=0} \quad a \in E$$

とおき、更に

$$C^\infty(E, f, \mathcal{F}) = \{ \varphi \in C^\infty(E); \varphi * Z = -i \langle f, Z \rangle \varphi \text{ for } \forall Z \in \mathcal{F} \}$$

$$\mathcal{C} = C^\infty(E, f, \mathcal{F}) \cap M(E, X_f)$$

$$\mathcal{H}(f, \eta_f, \mathcal{F}, E) = \mathcal{C} \cap \mathcal{H}(E, X_f)$$

とおく.

命題.  $\mathcal{H}(f, \eta_f, \mathcal{F}, E)$  は Hilbert space  $\mathcal{H}(E, X_f)$  の閉部分空間である.

さて  $\mathcal{H}(f, \eta_f, \mathcal{F}, E)$  は  $\text{ind}_{D \uparrow E} X_f$  で不変故  $\text{ind}_{D \uparrow E} X_f$  の部分表現を与えるが、これを  $\text{ind}_{D \uparrow E} (\eta_f, \mathcal{F})$  と書く.

$$\rho(f, \eta_f, \mathcal{F}, G) = \text{ind}_{E \uparrow G} (\text{ind}_{D \uparrow E} (\eta_f, \mathcal{F}))$$

とおくと、これは  $\text{ind}_{D \uparrow G} X_f$  の部分表現である.  $\rho(f, \eta_f, \mathcal{F}, G)$  を holomorphically induced representation と呼ぶ.  $\text{ind}_{D \uparrow G} X_f$  の表現空間を  $\hat{\mathcal{H}}(f, \eta_f, \mathcal{F}, G)$  で、 $\rho(f, \eta_f, \mathcal{F}, G)$  に対応する  $\mathcal{F}$  の部分空間を  $\mathcal{H}(f, \eta_f, \mathcal{F}, G)$  で表わす.

### 3) 単連結可解リ一群

以下  $G$  は単連結可解リ一群、 $\mathfrak{g}$  は  $G$  のリー環を表わす. 更に  $\mathfrak{n}$  を  $\mathfrak{g}$  の中零イデアルで  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  を含むものとし、 $\mathfrak{n}$  に対応する  $G$  の連結リ一部分群を  $N$  で表わす. 又  $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $f_0 = f|_{\mathfrak{n}}$

$\in \mathfrak{n}^*$  とする.  $\mathfrak{n}$  は  $\mathfrak{g}$  のイデアルであるから  $\text{Ad } G$  で不変、従って  $G$  の coadjoint 表現を  $\mathfrak{n}^*$  に制限する事により  $\mathfrak{n}^*$  は  $G$ -加群となる. この作用に関する  $G$  の  $f_0$  における固定群を  $G_{f_0}$  で表わす.

定義.  $f \in P(f, G)$  に対し、 $f \cap \mathfrak{n}^c \in P(f_0, N)$  なる時、 $f$  は  $n$ -admissible であるといい、更に  $f \cap \mathfrak{n}^c$  が  $\text{Ad}_{G_{f_0}}$  で不変な時、 $f$  は strongly  $n$ -admissible であるという.

注意.  $f \cap \mathfrak{n}^c$  が  $B_{f_0}$  に関し  $\mathfrak{n}^c$  の m.i.s. の時、 $f$  は  $n$ -admissible である.

この時まず次の存在定理が成り立つ.

定理. 任意の  $f \in \mathfrak{g}^*$  に対し strongly  $n$ -admissible な  $f \in P^+(f, G)$  が存在する. この時  $f$  は strong Pukanszky condition をみたす.

証明の idea.  $\mathfrak{g}^c$  のようなイデアル列で、ある  $\mathfrak{g}_{i_0} = \mathfrak{n}$  となっているものを選ぶ.  $f|_{\mathfrak{g}_i} = f_i$  とおき、 $\mathfrak{g}_i$  における  $B_{f_i}$  の radical (i.e. singular subspace) を  $V_i$  とする時、 $f = \sum_i V_i$

q. e. d.

さて  $f \in \mathfrak{g}^*$  が integral,  $f \in P(f, G)$  が strong Pukanszky condition をみたす時、holomorphically induced representation  $\rho(f, \eta_f, f, G)$  に関し、

1) その表現空間  $\mathcal{H}(f, \eta_f, f, G)$  は  $\neq \{0\}$  か?

の既約か?

の既約とする時、 $f$  に依らないか?

という問題が生じる。  $G$  を exponential group としても、一般の  $f \in P(f, G)$  (weak Pukanszky condition を仮定する) に対しては、これらの問題は (特に最も重要な) に関して (殆ど) 何もわからない (cf. [8], [17])。

まず  $G = N_{2k+1}$  ( $2k+1$  次元 Heisenberg 群) の時、この時は  $\forall f \in \mathfrak{g}^*$  は integral  $\tilde{\tau}$  かつ  $\eta_f$  は一意的な為、 $\rho(f, \eta_f, f, G)$  を  $\rho(f, f, G)$ 、 $\mathcal{H}(f, \eta_f, f, G)$  を  $\mathcal{H}(f, f, G)$  と書くと、

$$\mathcal{H}(f, f, G) \neq \{0\} \iff f \in P^+(f, G)$$

となり、 $f \in P^+(f, G)$  の時、前に  $N_3$  でみた様に  $\rho(f, f, G)$  は Kirillov theory により  $O(f)$  に associate した  $G$  の既約ユニタリ表現と同値である。

次に  $G$  が中零リー群の場合は本質的に Heisenberg に帰着される。即ち  $f \in P^+(f, G)$  に対し、その non-real part に associate した部分は Heisenberg である。

定理.  $G$  を単連結中零リー群、 $\mathfrak{g}$  を  $\tilde{\tau}$  のリー環、 $f \in \mathfrak{g}^*$ 、 $f \in P^+(f, G)$  かつ  $f \neq \bar{f}$  とし、 $\mathfrak{v}$ ,  $\mathfrak{e}$  は  $f$  から前と同様にして定義された  $\mathfrak{g}$  の部分リー環とする。  $\mathfrak{z} = \mathfrak{v} \cap \ker f$  とおくと、 $\mathfrak{v}$ ,  $\mathfrak{z}$  は  $\mathfrak{e}$  のイデアルであり、 $\mathfrak{e}/\mathfrak{z}$  は  $\mathfrak{v}/\mathfrak{z}$  を center とする Heisenberg algebra である。

この定理を用いると、 $G$  が中零の場合  $\rho(f, f, G)$  はすべて  $\rho(0(f))$  と同値である事が示される (但し、 $f \in P^+(f, G)$ ).

$G$  が可解群の場合にも本質的には Heisenberg に帰着する事により次の定理が証明される.

定理.  $G$  を単連結可解リー群、 $\mathfrak{g}$  をそのリー環、 $f \in \mathfrak{g}^*$  は integral,  $f \in P^+(f, G)$  は strongly  $n$ -admissible とする. この時、 $\rho(f, \eta_f, f, G) \neq \{0\}$  かつ  $\rho(f, \eta_f, f, G)$  は  $G$  の既約ユニタリ表現で  $f$  及び  $n$  に依らない.

注意. この定理の仮定はもっと弱める事ができ、 $\mathfrak{g}/n$  が中零となる様な  $\mathfrak{g}$  の中零イデアル  $n$  に関し、 $f \in P^+(f, G)$  が  $n$ -admissible であればよい (cf. [7]).

定理の証明の idea.  $\rho(f, \eta_f, f, G)$  が  $f$  を用いずに構成した  $G$  の既約ユニタリ表現と同値であることを証明する. 即ち、 $f_0 = f|_n \in n^*$  から Kirillov theory を用いて  $\rho(f_0)$  を構成し、この  $\rho(f_0)$  から Mackey's little group theorem を用いて  $G$  の既約ユニタリ表現  $\rho(f, \eta_f, G)$  を得る. 最後にこの  $\rho(f, \eta_f, G)$  が holomorphically induced representation  $\rho(f, \eta_f, f, G)$  と同値であることを示す.

$\rho(f, \eta_f, G)$  の構成. 1)  $\rho = \rho(f_0)$  を  $f_0 = f|_n \in n^*$  に associate した  $N$  の既約ユニタリ表現とすると、 $G$  の  $\hat{N}$  への作用に関する  $\rho(f_0)$  における固定群は

$$G(p(f_0)) = G_{f_0} \cdot N = G_{f_0} \times N/M, \quad M = \{(s, s^{-1}) ; s \in N_{f_0}\}$$

となる。  $N_{f_0}$  は連結である。

ロ)  $K = G_{f_0} \times N$  の既約ユニタリ表現で  $N$  に制限した時  $p(f_0)$  の multiple となるものの構成。

A)  $K$  のユニタリ表現  $\nu(f_0)$  で  $p(f_0)$  を拡張したもの  $\nu$  (従って  $\nu(f_0)$  は既約)、かつ

$$\nu(f_0)(s) = \chi_{f_0}(s)^{-1} p(f_0)(s) \quad \text{for } s \in N_{f_0} \subset G_{f_0} \quad \dots\dots\dots ①$$

となるものを構成する。  $p(f_0)$  の空間を  $H_0$  とする。

B)  $G_{f_0}$  の既約ユニタリ表現  $\mu$  で

$$\mu|N_{f_0} = \chi_{f_0} \cdot \text{id} \quad \dots\dots\dots ②$$

なるものを構成する。  $\mu$  の空間を  $H_1$  とする。

次に  $\mu$  を  $N$  上では trivial に  $K$  の表現に拡張する。この時、 $\tau = \mu \otimes \nu(f_0)$  は  $H_0 \otimes H_1$  における  $K$  の既約ユニタリ表現で、 $\tau|N$  は  $p(f_0)$  の multiple である。 (かかるに ①, ② より

$$\mu \otimes \nu(f_0)|M = \text{id}.$$

故に  $\tau$  は  $G(p(f_0)) = K/M$  の表現となる。 Mackey's little group theoremにより  $\rho(f, \eta_f, G) = \text{ind}_{G(p(f_0)) \rtimes G} \tau$  は  $G$  の既約ユニタリ表現となる。 g. e. d.

上記定理により、  $G$  を単連結可解リ-群とする時、 integral な  $f \in \mathfrak{g}^*$  と対応する character  $\eta_f: G_f \rightarrow \mathbb{T}$  の対  $(f, \eta_f)$  に associate して  $G$  の既約ユニタリ表現  $\rho(f, \eta_f)$  が得られる。

定理.  $f, f' \in \mathfrak{g}^*$  を integral とすると、

$$\rho(f, \eta_f) \simeq \rho(f', \eta_{f'}) \iff g \cdot (f, \eta_f) = (f', \eta_{f'})$$

for some  $g \in G$ .

明らかに integral というのは coadjoint 表現の orbit に関する概念で、 $f \in \mathfrak{g}^*$ ,  $O(f)$  は integral とする時、対応する character  $\eta_f: G_f \rightarrow \mathbb{T}$  の集合は  $\pi_1(O(f))$  の character group  $\widehat{\pi_1(O(f))}$  と 1 対 1 に対応し、結局 integral orbit  $\Omega$  と  $\pi_1(\Omega)$  の character  $\eta_\Omega$  の対に associate して  $\hat{G}$  の元  $\rho(\Omega, \eta_\Omega)$  が定まる。 $G$  が単連結可解リ一群の時、写像

$$\alpha: (\Omega, \eta_\Omega) \mapsto \rho(\Omega, \eta_\Omega)$$

は単射となる。最後に  $G$  が Type I の単連結可解リ一群の場合には次の事実が知られている。

定理. 単連結可解リ一群  $G$  が Type I である為には、 $\mathfrak{g}^*$  におけるすべての orbit が integral でかつ局所閉集合なる事が必要十分であり、この時

$$\alpha: \bigcup_{\Omega \in \mathfrak{g}^*/G} \widehat{\pi_1(\Omega)} \rightarrow \hat{G}$$

は全単射である。



## References.

- [1] L. Auslander, B. Kostant, Polarization and unitary representations of solvable Lie groups, *Invent. Math.*, 14(1971), 255-354
- [2] V. Bargmann, On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, I, *Comm. on pure and appl. Math.*, 14(1961), 187-214
- [3] P. Bernat, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 82(1965), 37-99
- [4] P. Bernat, et al. Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris, 1972
- [5] I.D. Brown, Dual topology of a nilpotent Lie group, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 6(1973), 407-411
- [6] J. Dixmier, L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles, *Bull. Soc. Math. France*, 85(1957), 113-121
- [7] M. Duflo, Sur les extensions des représentations irréductibles des groupes de Lie nilpotents, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 5(1972), 71-120
- [8] H. Fujiwara, On unitary representations of exponential groups, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 21(1974), 465-471
- [9] A.A. Kirillov, Unitary representations of nilpotent Lie groups, *Uspekhi Math. Nauk*, 17(1962), 59-110

- [10] B. Kostant, Quantization and unitary representations, Lecture notes, Springer, no. 170 (1970), 87-208
- [11] G.W. Mackey, Induced representations of locally compact groups I, *Ann. Math.*, 55 (1952), 101-139
- [12] G.W. Mackey, Unitary representations of group extensions, *Acta Math.*, 99 (1958), 265-311
- [13] C.C. Moore, Representations of solvable and nilpotent groups and harmonic analysis on nil and solvmanifolds, *Proc. A.M.S., Summer Conf., Williamstone, (1972)*
- [14] L. Pukanszky, On the theory of exponential groups, *Trans. A.M.S.*, 126 (1967), 487-507
- [15] L. Pukanszky, *Leçons sur les représentations des groupes*, Dunod, Paris, 1967
- [16] S. R. Quint, Representations of Lie groups, Lecture notes, Univ. California, 1972
- [17] H. Rossi, M. Vergne, Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group, *J. Func. Anal.*, 13 (1973), 324-389
- [18] M. Saito, Sur certains groupes de Lie résolubles I, II, *Sci. Pap. Coll. Gen. Ed. Tokyo*, 7 (1957), 1-11, 157-168

- [19] R. F. Streater, The representations of the oscillator group,  
Commun. Math. Phys., 4 (1967), 217-236
- [20] O. Takenouchi, Sur la facteur-représentation des groupes de  
Lie de type (E), Math. J. Okayama Univ., 7 (1957),  
151-161
- [21] M. Vergne, Etude de certaines représentations induites d'un  
groupe de Lie résoluble exponentiel, Ann. Ec. Norm.  
Sup., 3 (1970), 353-384